Seno, coseno e π

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t), \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} .$$

Lemma 1. *Mostrare che se*

$$x : (-T, T) \to \mathbb{R} \qquad e \qquad y : (-T, T) \to \mathbb{R}$$

sono soluzioni del sistema, allora

$$x^2(t) + y^2(t) = 1 \qquad \text{per ogni} \qquad x \in (-T, T).$$

Dedurre che le soluzioni sono globali, ovvero che esiste un'unica coppia di funzioni

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad e \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

che risolve il sistema.

Definizione 2. *Definiamo le funzioni seno e coseno come:*

$$\cos t := x(t) \qquad e \qquad \sin(t) = y(t),$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Osservazione 3. *Il seno ed il coseno sono funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}$. Per costruzione si ha*

$$\cos' t = -\sin t \qquad e \qquad \sin' t = \cos t\,,$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \qquad \text{per ogni} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Lemma 4 (Definizione di π)**.** *Sia*

$$x(t) = \cos t \qquad e \qquad y(t) = \sin t$$

le soluzioni del sistema. Allora esiste un numero reale positivo $T > 0$ tale che $x(T) = 0$.

Definizione 5. *Definiamo $\frac{\pi}{2}$ come il più piccolo numero reale positivo tale che $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, ovvero*

$$\frac{\pi}{2} = \min\{T > 0 \ : \ \cos T = 0\}.$$

Corollario 6. *La funzione*

$$x : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1],$$

è positiva, (strettamente) decrescente e bigettiva in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La funzione

$$y : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1],$$

è positiva, (strettamente) crescente e bigettiva in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. In particolare, per ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$x \geq 0\ , \quad y \geq 0\ , \quad x^2 + y^2 = 1\ ,$$

esiste un unico $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che

$$\cos t = x \qquad e \qquad \sin t = y.$$

Lemma 7. *Abbiamo che*

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad e \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \qquad e \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$$

Lemma 8 (Pari e dispari)**.** *La funzione coseno è pari:*

$$\cos(-t) = \cos t \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La funzione coseno è dispari:

$$\sin(-t) = -\sin t \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Lemma 9 (Formule di adizione)**.** *Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\begin{cases} \cos(\alpha + t) = \cos\alpha\,\cos t - \sin\alpha\,\sin t \\ \sin(\alpha + t) = \cos\alpha\,\sin t + \sin\alpha\,\cos t. \end{cases}$$

Lemma 10 (Periodicità)**.** *Per ogni $t \in \mathbb{R}$, abbiamo*

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$ *e* $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$*;*
- $\cos(\pi + t) = -\cos t$ *e* $\sin(\pi + t) = -\sin t$*;*
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t$ *e* $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t$*;*
- $\cos(2\pi + t) = \cos t$ *e* $\sin(2\pi + t) = \sin t$*.*

Teorema 11. *Per ogni punto $(x, y) \in \partial B_1 \in \mathbb{R}$, esiste un unico $\theta \in \big[0, 2\pi\big)$ tale che*

$$x = \cos\theta \qquad e \qquad y = \sin\theta.$$

Inoltre, le funzioni sin *e* cos *sono 2π-periodiche su $\mathbb{R}$.*